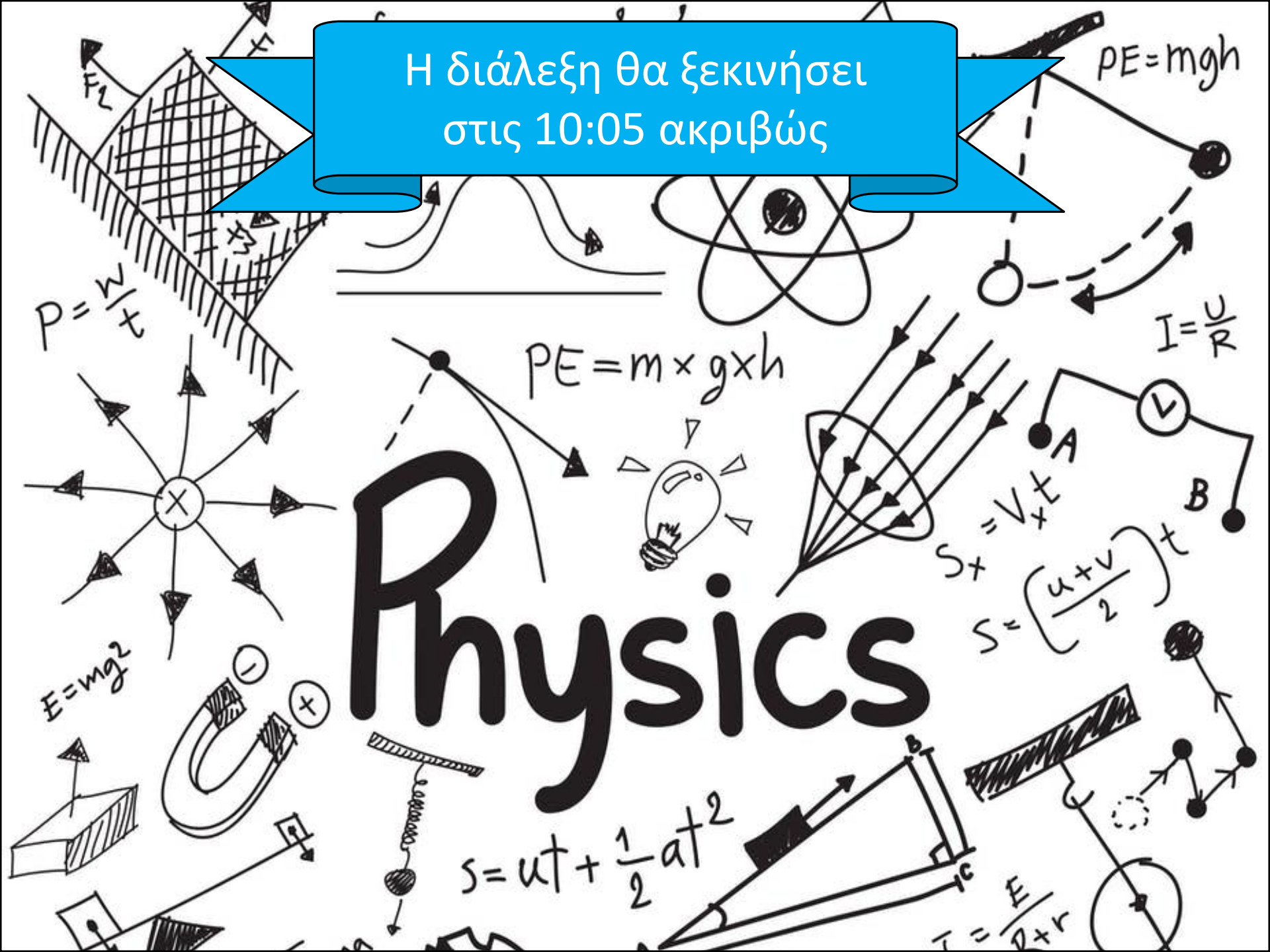


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:05 ακριβώς

Physics





Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

- Ο νόμος του Coulomb

- Η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2 (μηδενικού μεγέθους) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

όπου k_e είναι η σταθερά του Coulomb

- Σταθερά k_e

- $k_e = 8.987 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

- Επίσης, γράφεται ως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

- όπου $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$, και λέγεται **διηλεκτρική σταθερά του κενού**

- Το μικρότερο ελεύθερο φορτίο που έχει βρεθεί στη φύση είναι $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

- Ηλεκτρικό πεδίο

- Ηλεκτρικό Πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου: η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0 , δια το φορτίο αυτό

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

- Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

- $q_0 > 0, \vec{F}_e \uparrow \vec{E}$, $q_0 < 0, \vec{F}_e \downarrow \vec{E}$
- Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο P λόγω της παρουσίας **πηγής φορτίου** q δίνεται ως

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P δίνεται ως

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- Κατανομή φορτίου
- Βοηθητικές ποσότητες
 - Γραμμική πυκνότητα φορτίου

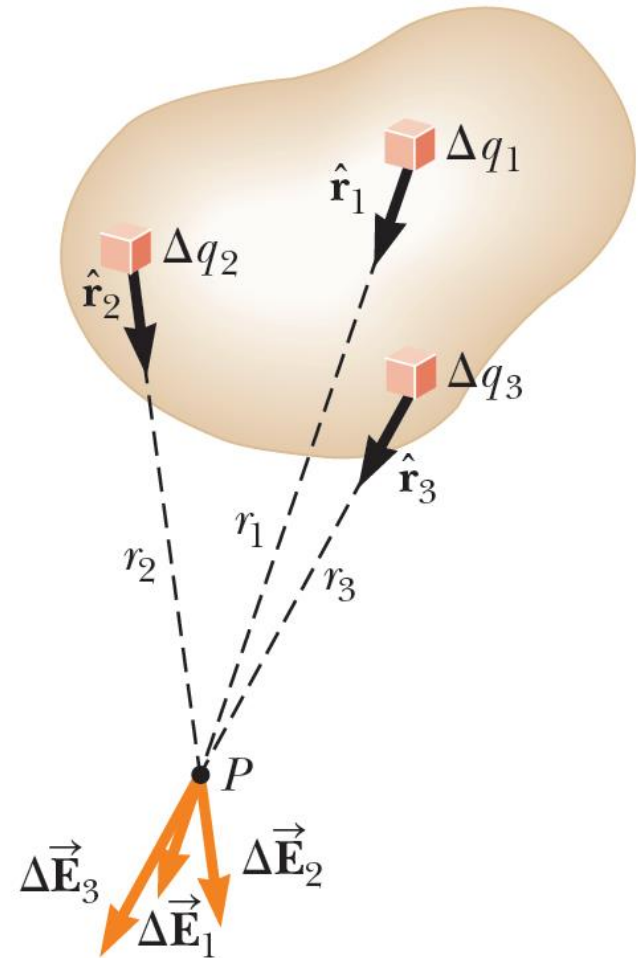
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

- Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

- Χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{V}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

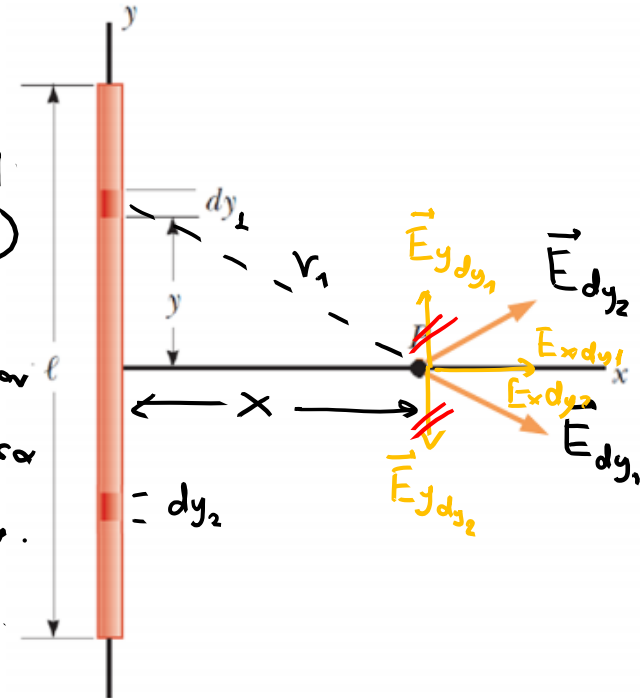
• Παράδειγμα 1:

- Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το μέσον της ράβδου, όπως στο σχήμα.

Τιμητοποιήστε τη ράβδο σε απειροστικά μικρά τμήματα μήκους dy και φορτία dq .
 Ισχύει $\lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{dq}{dy} \Rightarrow dq = \lambda dy$. (1)

Παρατηρούμε ότι για συμμετρία ως προς τον άξονα x έχουμε dy_1, dy_2 , η y -συνιστώσα των ηλεκτρ. πεδίων αλληλοεξουδετερώνεται.

Άρα το $\vec{E}_P$ θα έχει μόνο x -συνιστώσα.



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 1 - Λύση:

- Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Για το τμήμα ράβδου dy , το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα είναι:

$$d\vec{E}_P = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \stackrel{①}{=} k_e \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2}$$

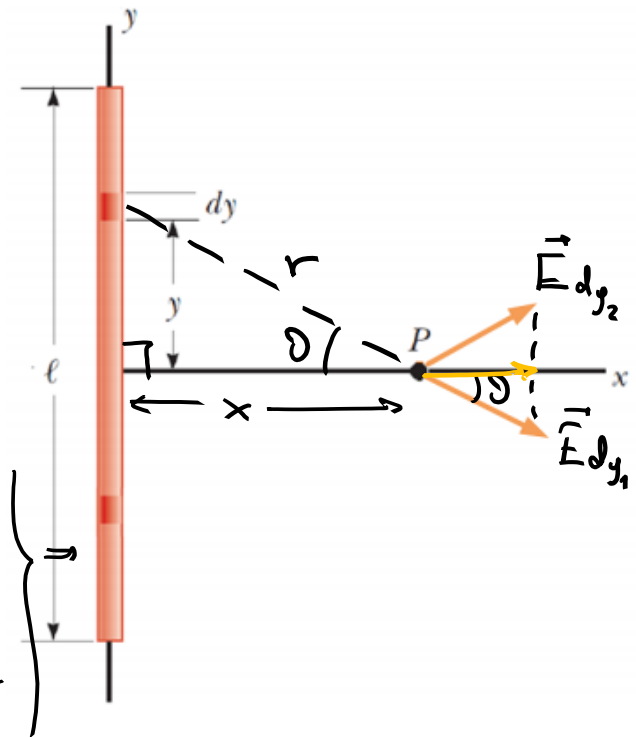
Η x-συνιστώσα θα είναι:

$$dE_{P_x} = dE \cos(\vartheta) = k_e \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2} \cos \vartheta$$

$$\cos \vartheta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow dE_{P_x} = k_e \lambda \frac{dy \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = k_e \lambda \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy$$

$$\longrightarrow \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 1 - Λύση:

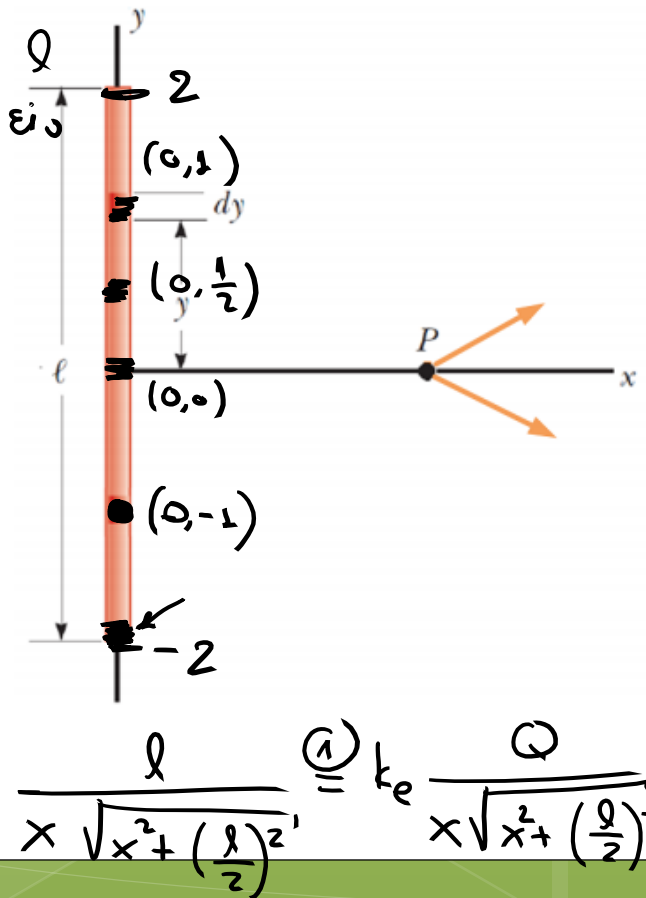
- Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Ανάλυση (επιχειρηματική) για κάθε σημείο
της ράβδου:

$$\begin{aligned} E_P &= E_{P_x} = \int dE_{P_x} = \int \frac{k_e \lambda x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy \\ &= k_e \lambda x \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy \quad \text{②} \\ &= k_e \lambda x \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{y=-\frac{\ell}{2}}^{y=\frac{\ell}{2}} = k_e \lambda \end{aligned}$$

$$\text{②} \int \frac{dx \leftarrow y}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 y x

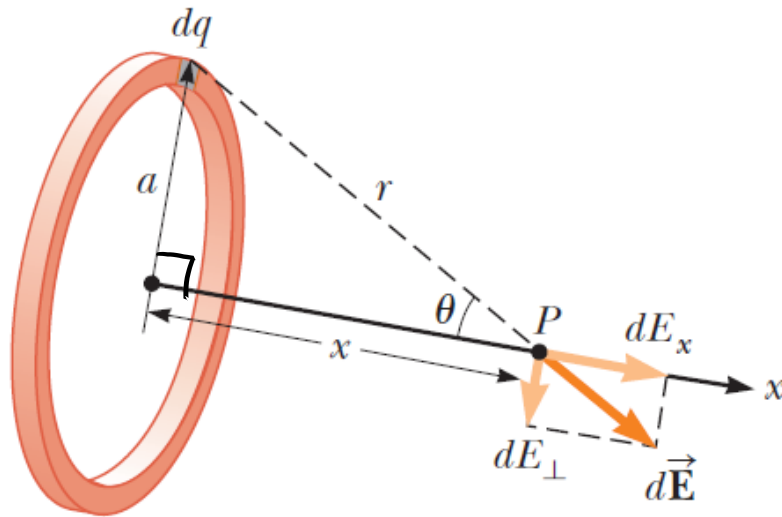


$$= k_e \lambda \frac{\ell}{x \sqrt{x^2 + (\frac{\ell}{2})^2}} \stackrel{\text{①}}{=} k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (\frac{\ell}{2})^2}}$$

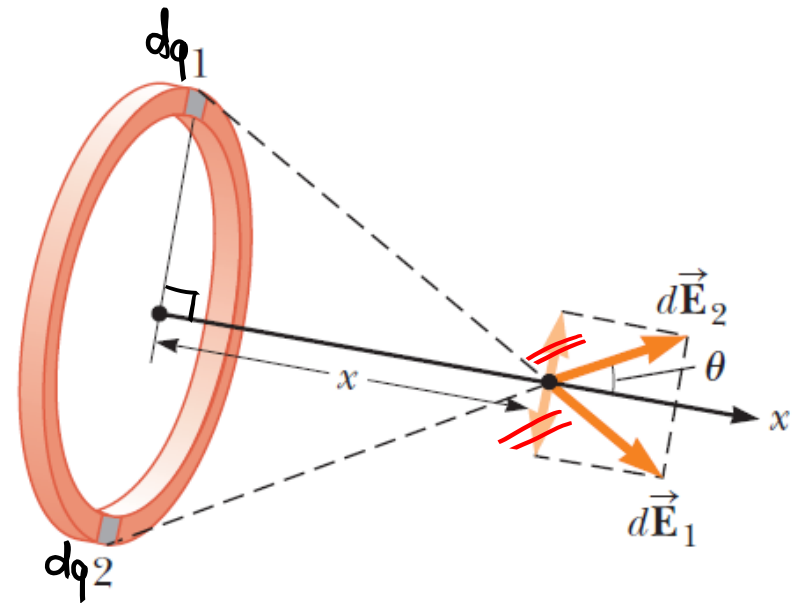
Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα 2:

- ◉ Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου.



a



b

Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 2 - Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

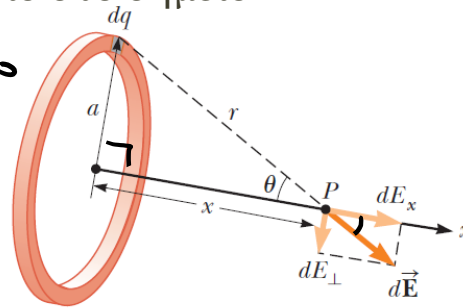
Οι συνιστώσες $dE_{\perp}$ γινόμενα ανυψοφρεγμένα σημεία του δακτυλίου αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα $\vec{E}_P = \vec{E}_{Px}$.

Έστω τμήμα του δακτυλίου

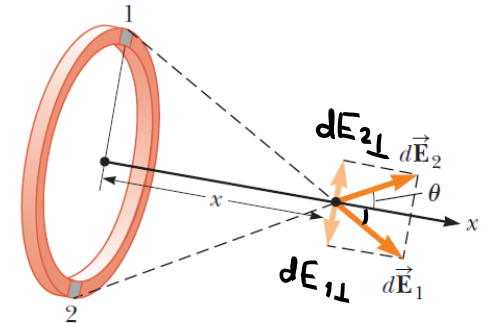
φορτίου dq και μήκους ds . Η συνεισφορά του dq στο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα είναι:

$$dE_P = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{(x^2 + a^2)} \rightarrow \left. \begin{aligned} dE_{Px} &= dE_P \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dE_{Px} = k_e \frac{x dq}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1) \quad \text{Άρα} \quad E_{Px} \stackrel{(1)}{=} \int dE_{Px} = \int k_e \frac{x dq}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} *$$



a



b

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{ds} \quad (1)$$

Παράδειγμα 2 – 2^η Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

Όμοια με πριν, καταλήγαμε στο

$$dE_{Px} = k_e \frac{x dq}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

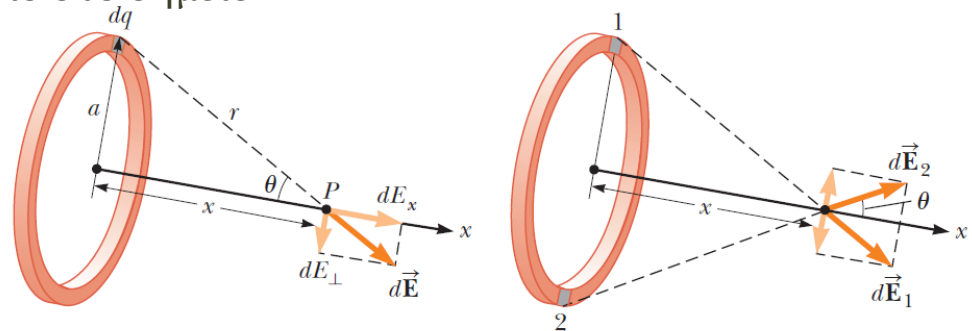
Υπολογίζω τη συνεισφορά στο

ηλεκτρ. πεδίο για κάθε τμήμα δακτυλίου dq μήκους ds , οπότε:

$$E_P = E_{Px} = \int dE_{Px} = k_e \times \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq \quad \text{Όμως } dq \stackrel{(1)}{=} \lambda ds,$$

$$\text{άρα } E_P = k_e \times \frac{\lambda}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int ds}_{\text{αθροισμα όλων των τμημάτων μήκους } ds} = k_e \times \frac{2\pi a \lambda}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = k_e \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

αθροισμα όλων των τμημάτων μήκους ds } = $2\pi a$

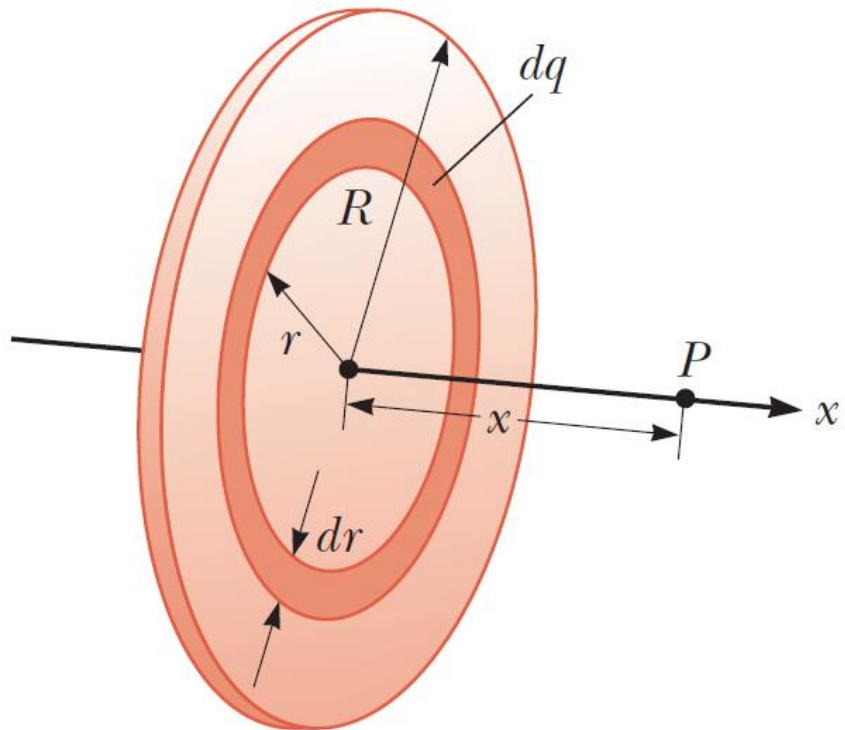


Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα 3:

- ◉ Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P σε απόσταση x , και που βρίσκεται στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου.

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \quad (1)$$

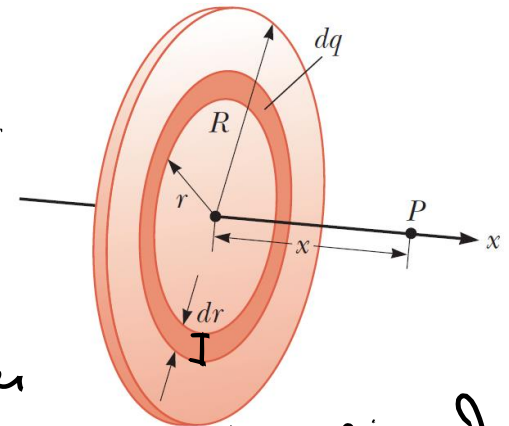
● Παράδειγμα 3 – Λύση:

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

Θεωράμε ότι ο δίσκος αποτελείται από "κυβερκώς" δακτυλίους ακτίνας $0 < r < R$.

Βρήκαμε πριν ότι $E_P = \frac{k_e Q x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, για δακτύλιο φορτία Q και ακτίνας a . Έστω ένας δακτύλιος ακτίνας r , φορτία dq , και πάχους dr . Άρα το ηλεκτρικό πεδίο ε'κτίαν του δακτυλίου θα είναι $dE_P = k_e x \frac{dq}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Από (1) $\Rightarrow dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r \cdot dr$. (2)

Άρα $dE_P \stackrel{(2)}{=} k_e x \frac{2\pi r \sigma dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Για να βρούμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα έχουμε:



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 3 – Λύση:

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (2)$$

$$E_p = \int dE_p = 2k_e \pi \sigma x \int \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} =$$

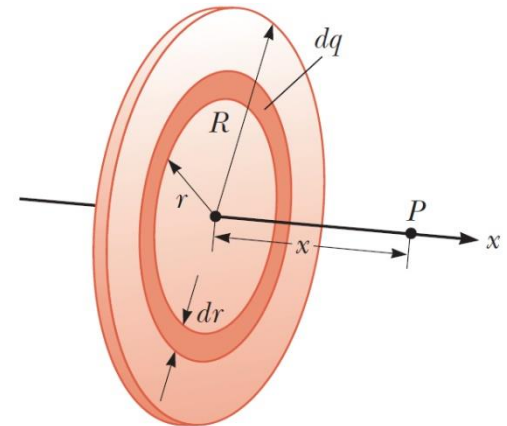
$$= 2\pi k_e \sigma x \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\text{Θέτω } r^2 + x^2 = u \Rightarrow \underline{du = 2r dr}$$

$$\text{Ενίκαν } u_1 = 0^2 + x^2 = x^2$$

$$u_2 = R^2 + x^2$$

$$\Rightarrow E_p = \pi k_e \sigma x \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \pi k_e \sigma x \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{3/2}} du = \pi k_e \sigma x \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-3/2} du$$



η σχέση (2) για $n = -3/2$

Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 3 – Λύση:

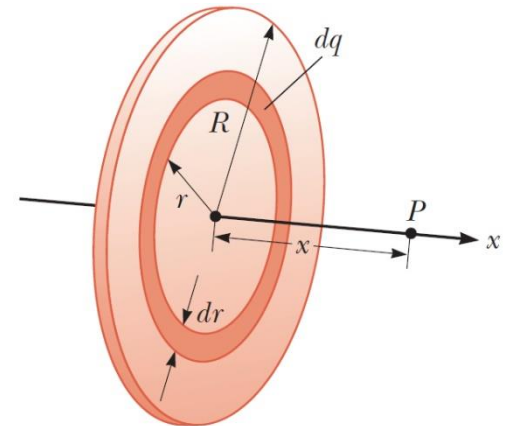
- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

$$= \pi k_e \sigma x (-2) \cdot \left. \frac{1}{\sqrt{u}} \right|_{u=x^2}^{u=R^2+x^2} =$$

$$= \dots$$

$$= 2k_e \pi \sigma x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$= 2k_e \pi \sigma \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Ηλεκτρικά Πεδία

- Σε όλα τα παραδείγματα είδατε τη φιλοσοφία προσέγγισης
- Από ένα μικρό, «σημειακό» φορτίο (είτε πραγματικό σημειακό φορτίο είτε κατανομή μικρού φορτίου) γενικεύσαμε σε ολόκληρη την κατανομή φορτίου
- Υπολογίσαμε τη συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο λόγω του σημειακού φορτίου
- Αθροίσαμε (ολοκληρώσαμε) όλες τις συνεισφορές που οφείλονται σε όλα τα σημειακά φορτία

Ηλεκτρικά Πεδία

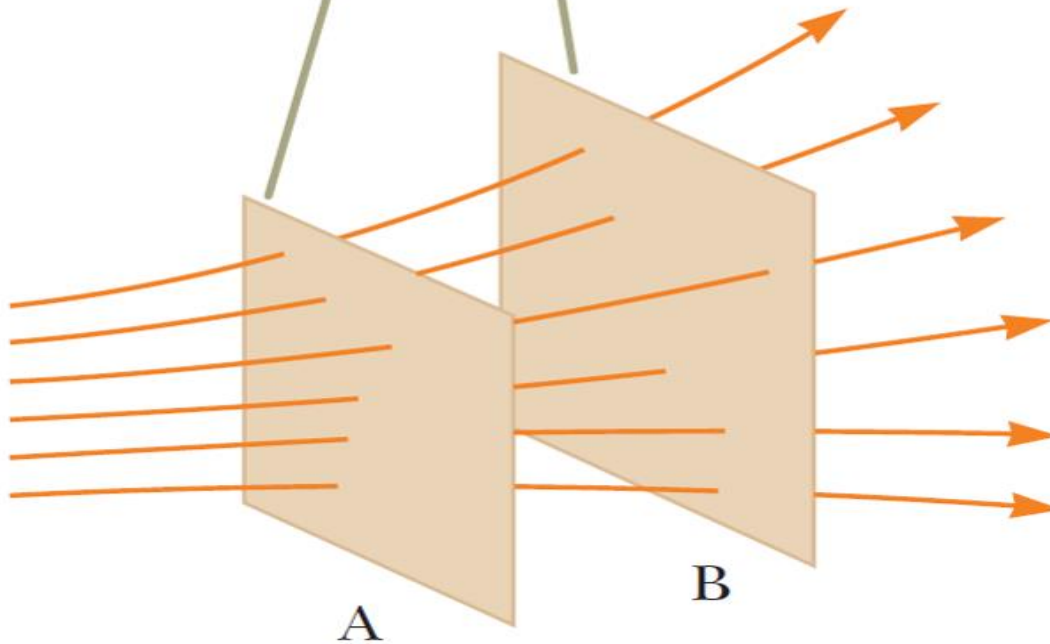
◉ Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

- ◉ Δεν μπορούμε να δούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο
- ◉ Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης είναι οι **δυναμικές γραμμές** ηλεκτρικού πεδίου
 - ◉ Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο του χώρου
 - ◉ Η κατεύθυνση της γραμμής είναι όμοια με αυτή της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο πεδίο
 - ◉ Ο αριθμός των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου
 - ◉ Με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές όπου η «δύναμη» του πεδίου είναι μεγαλύτερη

Ηλεκτρικά Πεδία

- Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη στην επιφάνεια A από ότι στην επιφάνεια B.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**

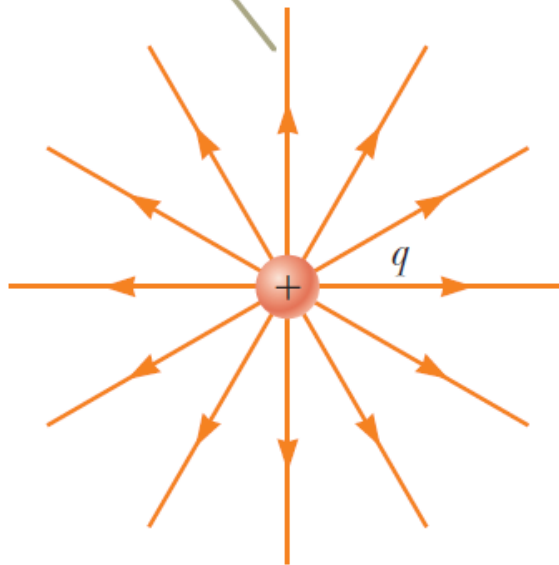
- Πώς τις σχεδιάζουμε;

- Οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε οι δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν ή θα τελειώνουν απειροστά μακριά.
- Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογη του μέτρου του φορτίου.
- Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

Ηλεκτρικά Πεδία

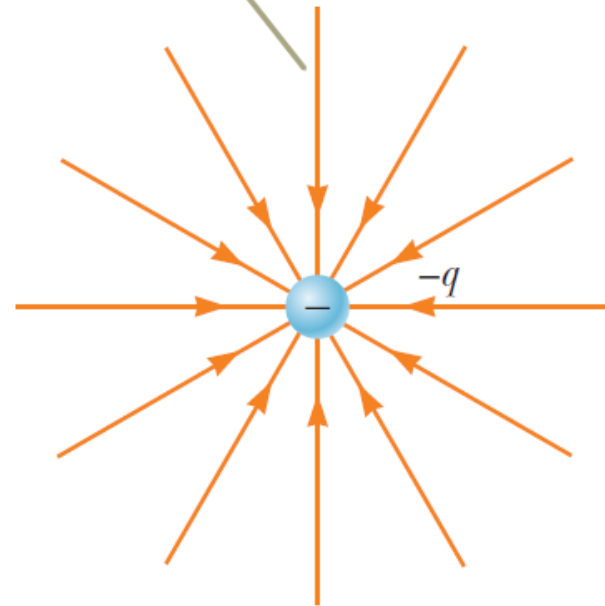
Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Για ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα έξω.



a

Για ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα μέσα.

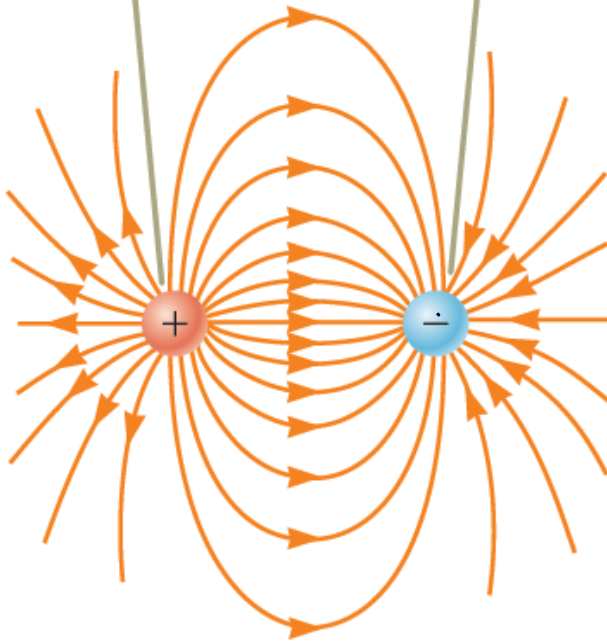


b

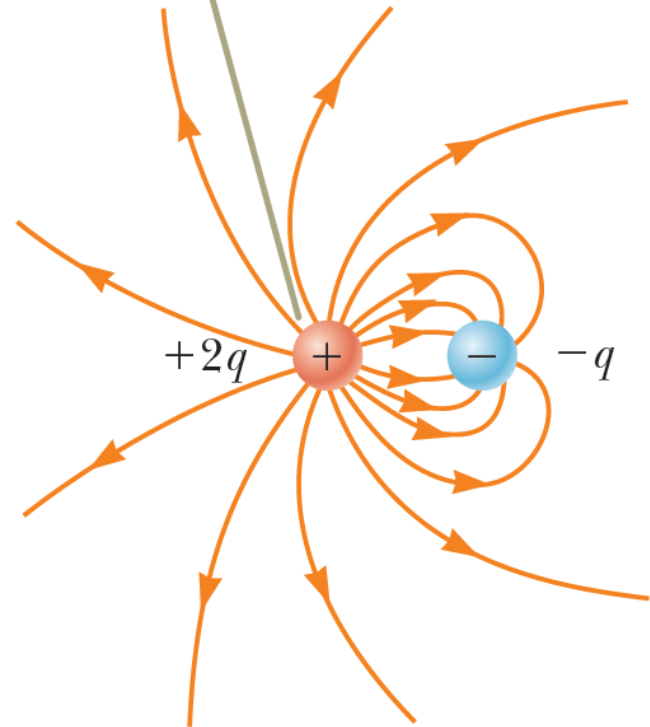
Ηλεκτρικά Πεδία

○ Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο ισούται με τον αριθμό γραμμών που φθάνουν στο αρνητικό φορτίο.



Δυο δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το $+2q$ για κάθε μια που τερματίζει στο $-q$.





Συνεχίζεται... 😊
